On a : $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{(x+1)}{x}\ln(\dfrac{x+1}{x})=\lim\limits_{X\to0^+}X\ \ln X=0 \quad (X=\dfrac{x+1}{x})$

• $\lim\limits_{x\to-1^-}x^2=1$ d'où $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=0=f(-1)$ et par suite f et continue à gauche en -1.

Conclusion : f est continue sur $\mathbf{R}$.

b) • La fonction $x\mapsto x(x+1)\ \ln(\dfrac{x+1}{x})$ est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

• ***Dérivabilité de f à droite*** **0** :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x+1)\ln(\dfrac{x+1}{x})}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}(x+1)\ln(\frac{x+1}{x})=\lim_{x\to0^+}(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})=+\infty$$

car $\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(1+\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(1+X)=+\infty$

et par suite f n'est pas dérivable en 0.

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x(x+1)\ln(\dfrac{x+1}{x})}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1^-}x\ \ln(\frac{x+1}{x})=+\infty$$

et par suite f n'est pas dérivable à gauche en -1.

Conclusion : f est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ et $\mathcal{C}_f$ admet deux demi tangentes verticales aux points d'abscisses respectives : -1 et 0.

c) $\forall x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$,

$$f'(x)=(2x+1)\ \ln(\frac{x+1}{x})+x(x+1)\frac{-1}{x(x+1)}$$

$$=(2x+1)\ \ln(\frac{x+1}{x})-1=(2x+1)\ [\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{2x+1}]=(2x+1)\ h(x)$$